Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc

*Ministère de l'Éducation Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique*

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2008

■ Exercice Numéro 1 : (03,50 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit r l'application définie ainsi : $r : M(z) \mapsto M_1(z_1)$.

avec : $z_1 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)$

Soit h l'application définie ainsi : $h : M(z) \mapsto M_2(z_2)$.
avec : $z_2 = -2z + 3i$

Soit F l'application définie ainsi : $F = h \circ r$.

1,00 **1** Déterminer la nature de chacune des applications r et h.

2 Soient : $\Omega(i)$; $A(a)$; $M(z)$; $M'(z')$; $a \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$.

Soient : $B = F(A)$; $C = F(B)$; $D = F(C)$.

0,50 **a** Montrer que : $F(M) = M' \Rightarrow z' - i = 2\,e^{\frac{4i\pi}{3}}(z-i)$.

0,25 **b** Montrer que Ω est le seul point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$.

0,75 **3** **a** Donner, en fonction de a, les nbrs : $b = aff(B)$; $c = aff(C)$; $d = aff(D)$

0,25 **b** Montrer que les points Ω ; A ; D sont colinéaires.

0,50 **c** Montrer que : $\Omega = barycentre\,\{(B,4)\ ;\ (C,2)\ ;\ (D,1)\}$

0,25 **d** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour lesquels $D \in (l'axe\ réelle)$

■ Exercice Numéro 2 : (04,00 points)

Rappel : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $x * y = x + y - 3xy$.

0,25 **1** **a** Vérifier que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(1-3x)(1-3y) = 1 - 3(x*y)$.

0,75 **b** Montrer que : $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right)$ est un groupe commutatif.

2 Soit l'application définie ainsi : $\varphi : \left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\} ; *\right) \mapsto (\mathbb{R}^*,\times)$
$x \mapsto 1-3x$

0,50 **a** Montrer que φ est un isomorphisme.

0,25 **b** Montrer que : $\varphi^{-1}\left(\left]0,+\infty\right[\right) = \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[$

0,50 **c** Montrer que $\left(\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right[\ ;*\right)$ est un sous groupe de $\left(\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}\ ;*\right)$

3 On pose : $\begin{cases} x^{(n+1)} = x^{(n)} * x \\ x^{(0)} = 0 \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$

0,25 **a** Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\varphi\left(x^{(n)}\right) = \left(\varphi(x)\right)^{n}$

0,50 **b** En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et n .

4 Soit : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $x \top y = x + y - \frac{1}{3}$

0,50 **a** Montrer que $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe commutatif .

0,50 **b** Montrer que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps commutatif .

■ Exercice Numéro 3 : (02,50 points)

Une urne contient 4 boules : une blanche et 3 boules rouges toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de cette urne, On note sa couleur puis la remet à nouveau dans l'urne. On répète le même procédé jusqu'à l'obtention de deux boules successives de la même couleur puis on s'arrête. Soit X la variable aléatoire qui prend le rang où l'expérience s'est arrêtée.

1,00 **1** Calculer les probabilités suivantes : $p[X = 2]$ et $p[X = 3]$.

0,75 **2** **a** Montrer que : $p[X = 2k] = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$; $k \in \mathbb{N}$

0,75 **b** Montrer que : $p[X = 2k+1] = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$; $k \in \mathbb{N}$

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I = \left]\frac{-1}{2} ; +\infty\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{x} & ; \quad \forall\, x \neq 0 \\ f(0) = 2 & \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm.$

$$h_a(x) = \Big(\ln(1+2a) - 2a\Big)x^2 - \Big(\ln(1+2x) - 2x\Big)a^2$$

0,50 **1** Montrer que la fonction f est continue en zéro.

0,50 **2** **a** Calculer $h_a(0)$ et $h_a(a)$.

En déduire que : $\exists!\, b \in [0, a]$; $\dfrac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \dfrac{-2}{1+2b}$

0,75 **b** Montrer que f est dérivable en zéro et que : $f'(0) = -2$.

0,50 **3** **a** Montrer que f est dérivable Sur $I^* = I\backslash\{\,0\,\}$. puis Montrer que :

$$\forall\, x \in I^* \quad ; \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \quad ; \quad g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$$

0,50 | | | **b** | Montrer que : $\forall x \in I^*$; $g(x) < 0$.

0,25 | | | **c** | En déduire la monotonie de la fonction f sur l'intervalle I .

0,50 | | **4** | **a** | Calculer puis interpréter les limites : $\lim\limits_{x \to \left(\frac{-1}{2}\right)^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

0,50 | | | **b** | Montrer que : $\exists!\ \alpha \in [1\,,2]$; $f(\alpha) = 1$.

0,50 | | | **c** | Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

II | | | On pose : $(\forall x \in I)$; $\varphi(x) = \ln(1+2x)$ *et* $J = [1,\alpha]$.

0,50 | | **1** | **a** | Montrer que la fonction φ est dérivable sur l'intervalle I et que :

$$(\forall\, x \geq 1) \quad ; \quad 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

0,75 | | | **b** | Vérifier que : $\varphi(\alpha) = \alpha$ *et* $\varphi(J) \subseteq J$.

| **2** | | Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \ln(1 + 2\,u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

0,50 | | | **a** | Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \in J$

0,50 | | | **b** | Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

0,50 | | | **c** | En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

III | | | Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle I ainsi :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

0,50 | | **1** | **a** | Montrer que la fonction F est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.

0,25 | | | **b** | En déduire la monotonie de la fonction F sur l'intervalle I .

0,50 | | **2** | **a** | Montrer que : $\forall\, x \geq 1$; $F(x) > \displaystyle\int_1^x \left(\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\right) dt$

0,50 | | | **b** | En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

| **3** | | On pose : $\forall\, x \in \left[\frac{-1}{2}\,;+\infty\right[$; $\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) \quad ; \quad \forall\, x \in I \\ \tilde{F}\left(\frac{-1}{2}\right) = \ell = \lim\limits_{x \to \left(\frac{-1}{2}\right)^+} F(x) \end{cases}$

0,50 | | | **a** | Montrer, (par TAF), que : $(\forall\, x \in I)$; $F(x) - \ell > \left(x + \frac{1}{2}\right) f(x)$

0,50 | | | **b** | En déduire que la fonction $\tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite en $\frac{-1}{2}$.